GENERALITES SUR LES FONCTIONS

I. Rappels

a. Vocabulaire

Définition
Une fonction est un procédé qui permet d'associer à un nombre x appartenant à un ensemble D un nombre y
On note : $f : x \mapsto f(x)$ ou $x \xrightarrow{f} y$ ou encore $y = f(x)$
On dit que y est **l'image** de x par la fonction f et que x est **un antécédent** de y par f

Exemple :
$f(x) = x^2 - 2x - 15$
L'image de 7 par f est $f(7) = 7^2 - 2\times 7 - 15 = 49 - 14 - 15 = 20$.
0 a deux antécédents : -3 et 5 car $f(-3) = f(5) = 0$.
2 est un antécédent de -15.

Définition
Pour une fonction $f(x)$ donnée, on appelle **ensemble de définition** l'ensemble D des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer cette expression.

Exemples :
$f(x) = \dfrac{2x+7}{3x-4}$

Domaine de définition : il faut que $3x - 4 \neq 0$ donc : $D_f = \mathbb{R} - \{ \frac{4}{3} \} =]-\infty ; \frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3} ; +\infty[$

On dit aussi que $\frac{4}{3}$ est une **valeur interdite** pour la fonction f.

$g(x) = \sqrt{-3x+6}$
On doit avoir $-3x + 6 \geqslant 0$ soit $x \leqslant 2$ donc : $D_g =]-\infty ; 2]$

Remarques :
- Un réel de l'ensemble de définition a toujours une et une seule image.
- Un réel peut voir zéro, un ou plusieurs antécédents.
- Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.
- Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif.

b. Représentation graphique

Dans tout le reste du chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

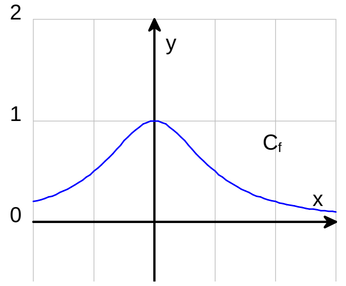
Définition
Un repère étant choisi, on appelle **représentation graphique** d'une fonction f l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ lorsque x prend toutes les valeurs de D_f et que $y = f(x)$.
On dit aussi **courbe représentative** de la fonction f.
On dit que la courbe a pour équation $y = f(x)$.

Méthode :
On calcule des images en nombre suffisant, à l'aide de la calculatrice et on présente les résultats dans un tableau de valeurs.

Exemple :

Tracer la représentation graphique de la fonction f, qui à x associe $\dfrac{1}{1+x^2}$ sur [– 2 ; 3].

x	– 2	– 1	0	1	2	3
$f(x)$	0,2	0,5	1	0,5	0,2	0,1



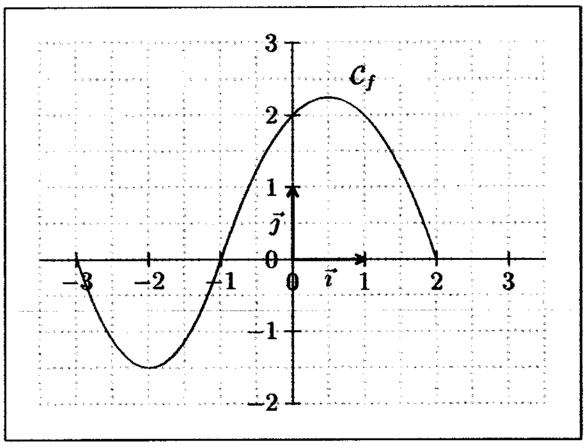
Lecture graphique d'images et d'antécédents :

- Pour déterminer l'image de x par f, on place x en abscisse puis on lit l'ordonnée sur la courbe.
- Pour déterminer les antécédents de k par f, on place k en ordonnée puis on cherche les abscisses des points d'intersection de la droite horizontale d'équation $y = k$ avec la courbe.

Exemples :

Sur la courbe suivante, déterminer :

1. L'ensemble de définition de f.
   D_f = [– 2 ; 2]
2. $f(1)$; $f(0)$.
   $f(1) = 2$; $f(0) = 2$.
3. Image de – 2 ; de 2.
   L'image de – 2 est – 1,5 et l'image de 2 est 0.
4. Antécédent(s) de – 2 ; de – 1,5 ; de 2.
   – 2 n'a pas d'antécédent ; l'antécédent de – 1,5 est – 2 ;les antécédents de 2 sont 0 et 1
5. x tels que $f(x) = 0$; $f(x) = 1$.
   S = { – 3 ; – 1 ; 2 }



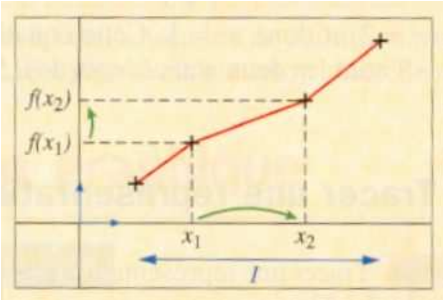
c. Sens de variations

Définitions

f est une fonction définie sur un intervalle I.

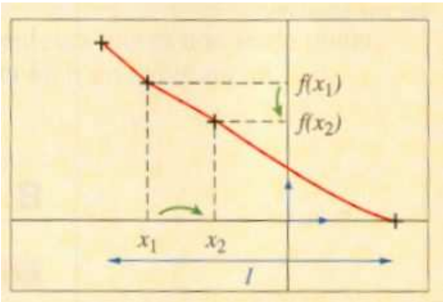
Dire que *f* est **croissante** sur I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$

Autrement dit, les images réels x_1 et x_2 sont rangées dans le même ordre que réels x_1 et x_2.



Dire que *f* est **décroissante** sur I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Autrement dit, les images réels x_1 et x_2 sont rangées dans l'ordre inverse que réels x_1 et x_2.



Dire que *f* est **constante** sur I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I , on a $f(x_1) = f(x_2)$.

Une fonction **monotone** sur I est une fonction soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

d. Extremum

Définition

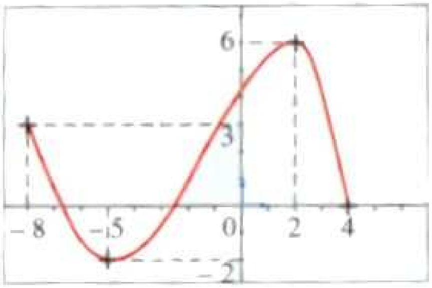
La fonction *f* admet un **maximum** f(a) en a sur l'intervalle I lorsque, pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$.

La fonction *f* admet un **minimum** f(b) en b sur l'intervalle I lorsque, pour tout x de I, $f(x) \geq f$(b).

Exemple :

Soi *f* la fonction représentée ci-dessous.

Quels sont les extremum de *f* ? Pour quelles valeurs sont-ils atteints ?



La fonction *f* admet un minimum en – 5 qui vaut –2 et un maximum en 2 qui vaut 6.

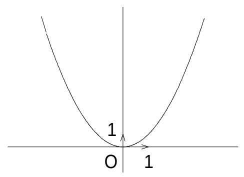
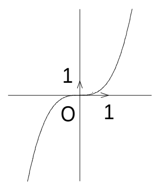
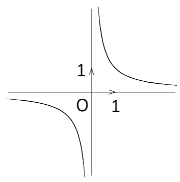
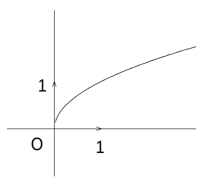
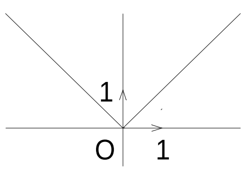
e. Tableau de variations

Etudier les variations d'une fonction signifie trouver les intervalles sur chacun desquels la fonction est monotone.
Les résultats sont représentés dans un tableau de variations.
Des flèches schématisent la croissance, la décroissance ou la constance de la fonction.

Exemple :
Donner le tableau de variations de la fonction f définie sur $[-8 ; 4]$ de la courbe ci-dessus.

x	-8		-5		2		4
$f(x)$	3	↘	-2	↗	6	↘	0

II. FONCTIONS DE REFERENCE

	Courbe représentative	**Tableau de variations**	**Variations**
$f(x) = x^2$ $Df = \mathbb{R}$		x : $-\infty$; 0 ; $+\infty$ $f(x)$: ↘ ↗	f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$
$f(x) = x3$ $Df = \mathbb{R}$		x : $-\infty$; $+\infty$ $f(x)$: ↗	f est croissante sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ $Df = \mathbb{R}$		x : $-\infty$; 0 ; $+\infty$ $f(x)$: ↘ ‖ ↘	f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$ $Df = \mathbb{R}$		x : 0 ; $+\infty$ $f(x)$: ↗	f est croissante sur $[0 ; +\infty[$
$f(x) = \lvert x \rvert$ $Df = \mathbb{R}$		x : $-\infty$; 0 ; $+\infty$ $f(x)$: ↘ ↗	f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$

III. Fonctions associees

On suppose que f est représentée par la courbe C_f et g par la courbe C_g dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

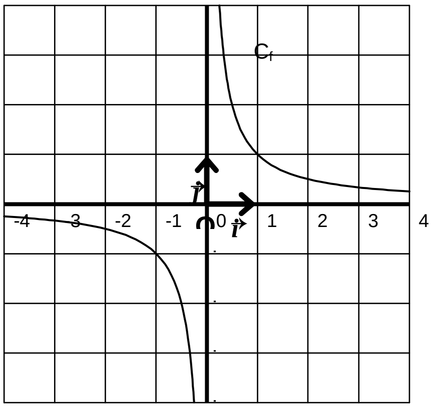
a. Fonction $f(x + a)$

Courbe représentative de la fonction $g(x) = f(x + a)$

On obtient la courbe C_g en effectuant une translation de C_f de vecteur $-a\vec{i}$

Exemples :

Tracer les représentations graphiques des fonctions $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$.



C_g est l'image de C_f par la translation de vecteur $\vec{i}$ et C_h est l'image de C par la translation de vecteur $-2\vec{i}$

b. Fonction et $f(x) + b$

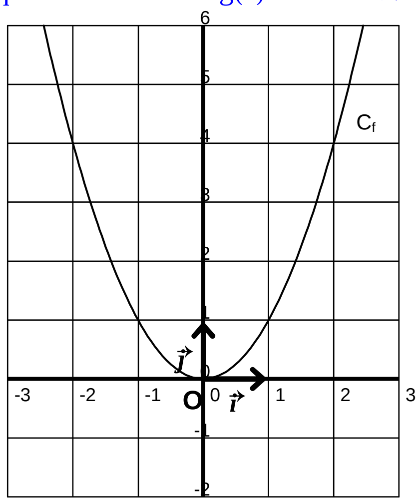
Courbe représentative de la fonction $g(x) = f(x) + b$

On obtient la courbe C_g en effectuant une translation de C_f de vecteur $b\vec{j}$

Remarque :
Les fonctions f et $f + b$ ont le même sens de variation.

Exemple :

Tracer les représentations graphiques des fonctions $g(x) = x^2 + 3$ et $h(x) = x^2 - 1$



C_g est l'image de C par la translation de vecteur $3\vec{j}$ et C_h est l'image de C par la translation de vecteur $-\vec{j}$

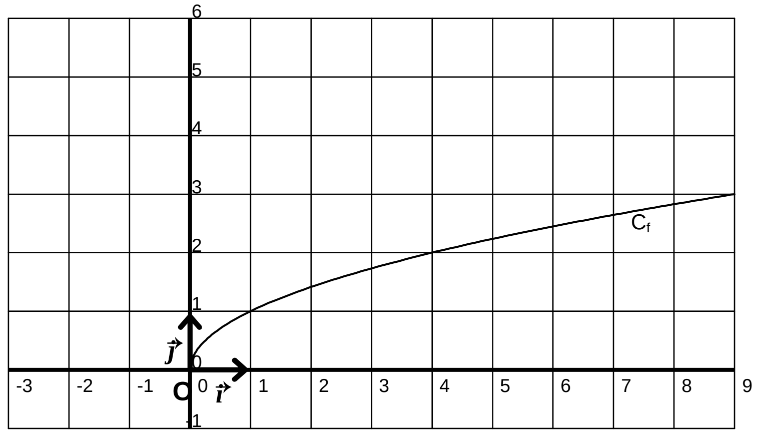
c. Fonction et $f(x+a)$ + b

Courbe représentative de la fonction g(x) = f(x + a) + b

On obtient la courbe C_g en effectuant une translation de C_f de vecteur $-\text{a}\,\vec{i} + \text{k}\,\vec{j}$

Exemple :

Tracer la représentation graphique de la fonctions $g(x) = \sqrt{x+2} + 3$



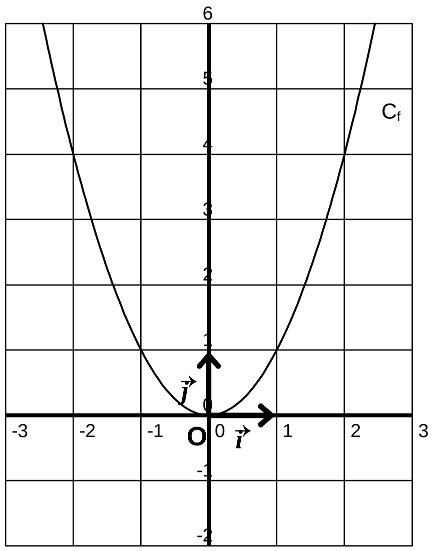
C_g est l'image de C par la translation de vecteur $-2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$.
Autrement dit, on « décale » la courbe C de 2 unités vers la gauche et 3 unités vers le haut.

d. Fonctions k $f(x)$

Courbe représentative de la fonction g(x) = k f(x)
On obtient la courbe C_g en multipliant les ordonnées des points de C_f par k.

Exemple :

Tracer la représentation graphique de la fonctions $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

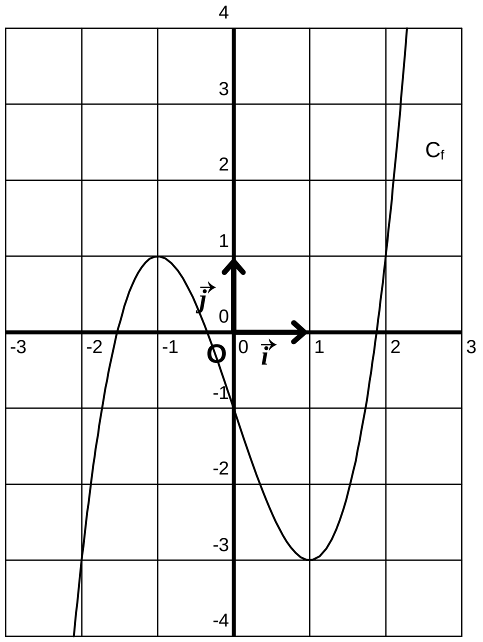


Remarques :

- Si k > 0, alors la fonction k f a le même sens de variation que la fonction f.
- Si k < 0, alors la fonction k f a le sens de variation contraire de la fonction f.

Cas particulier lorsque k = – 1 : g(*x*) = – *f*(*x*)
C_g est la symétrique de la courbe C_f par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple :
Tracer la courbe représentative de la fonction g(*x*) = – *f*(*x*)

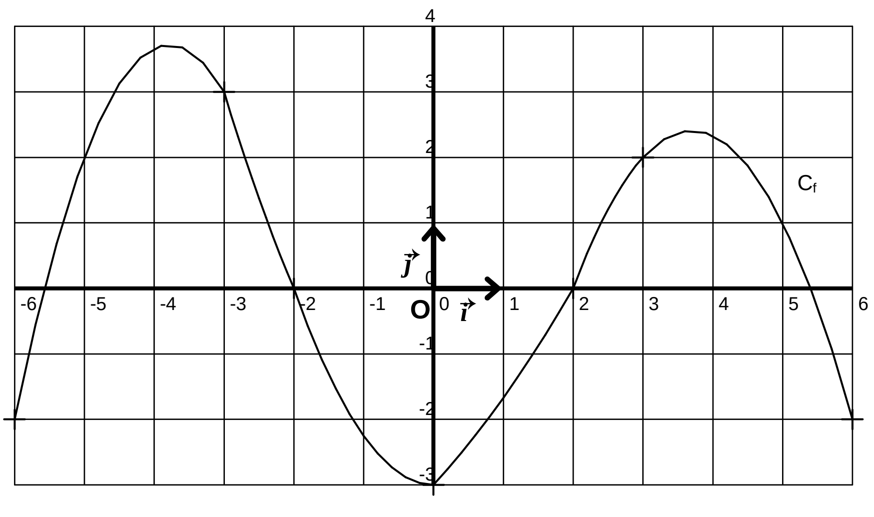


e. Fonction | f(*x*) |

Courbe représentative de la fonction | *f*(x) |

Pour représenter | *f* |, on conserve la partie de C_f qui est au-dessus de l'axe des abscisses et on complète par le symétrique de la partie qui est au-dessous de cet axe.

Exemple :
Tracer | ***f*(x)** |



IV. OPERATIONS SUR LES FOCNTIONS

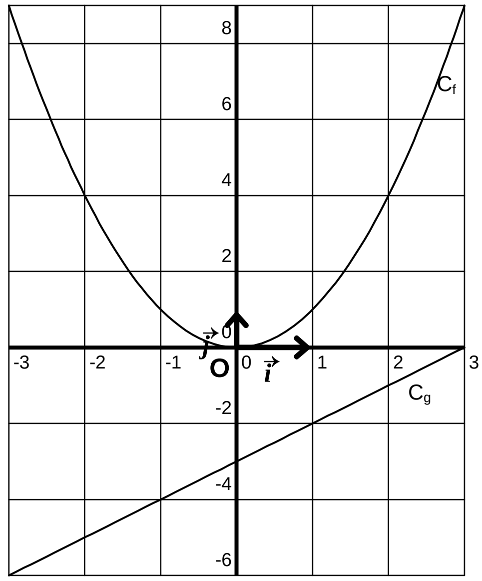
Soit *f* et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de ℝ.

- La fonction $f + g$ est la fonction définie sur I par : $x \mapsto f(x) + g(x)$.
- La fonction $f - g$ est la fonction définie sur I par : $x \mapsto f(x) - g(x)$.

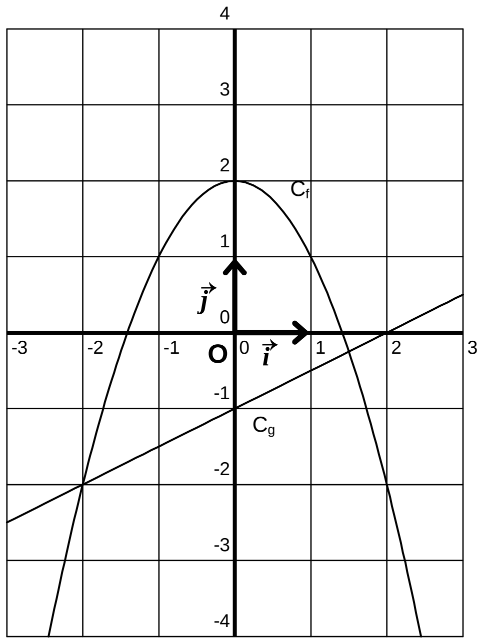
Courbes représentatives des fonctions *f* + g et *f* – g
On obtient les courbes représentatives de $f + g$ [resp. $f - g$] en additionnant [resp. soustrayant] les ordonnées des points de C_f et de C_g ayant la même abscisse.

Remarque :
Si deux fonctions ont le même sens de variation sur un intervalle I alors la fonction $f + g$ garde ce sens de variation.

Exemples :
Tracer $f + g$



Tracer $f - g$



V. FONCTIONS COMPOSEES

a. Définition

Soit f la fonction définie sur $[-2 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$
Pour calculer $f(x)$ avec $x \geqslant 2$, on calcule d'abord $X = x + 2$, puis la racine carrée de X :
On note $f(x) = \sqrt{X}$ Avec $X = x + 2$.

Distinguer ainsi les étapes du calcul de $f(x)$ conduit à la décomposition suivante de la fonction f.

$$x \xrightarrow{\ g\ } x+2$$
$$X \xrightarrow{\ h\ } \sqrt{X}$$
$$x \xrightarrow{\ \ f\ \ } \sqrt{x+2}$$

On dit que f est la composée de g suivie de h et on note $f(x) = h(g(x))$

Exemple :

Soit $g(x) = 5 - x$ et $h(x) = \frac{3}{x} - 2$

On a $f(x) = h(g(x)) = \frac{3}{5-x} - 2 = \frac{3 - 10 + 2x}{5-x} = \frac{2x-7}{5-x}$

b. Sens de variation des fonctions composées

En se plaçant sur un intervalle I où la fonction composée existe :

- Si les deux fonctions ont même sens de variation, alors leur composée est croissante sur I.
- Si les deux fonctions ont des sens de variation contraires, alors leur composée est décroissante sur I.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-2}$

f est la composée de la fonction g suivie de la fonction h où :

- $g(x) = x - 2$
- $h(x) = \frac{1}{x}$

Sur $]2 ; +\infty[$, la fonction affine g est croissante et à valeurs dans $]0 ; +\infty[$
sur $]0 ; +\infty[$, la fonction inverse h est décroissante
donc par composée, la fonction f est décroissante sur $]2 ; +\infty[$.

Sur $]-\infty ; 2[$ la fonction g est croissante et à valeurs dans $]-\infty ; 0[$
Sur $]-\infty ; 0[$ la fonction inverse h est décroissante
donc par composée, la fonction f est décroissante sur $]-\infty ; 2[$.