

Sens de variation d'une fonction. Extremum.

I) Sens de variation d'une fonction

1) Fonction croissante. Fonction décroissante

- Une fonction f est **croissante** :

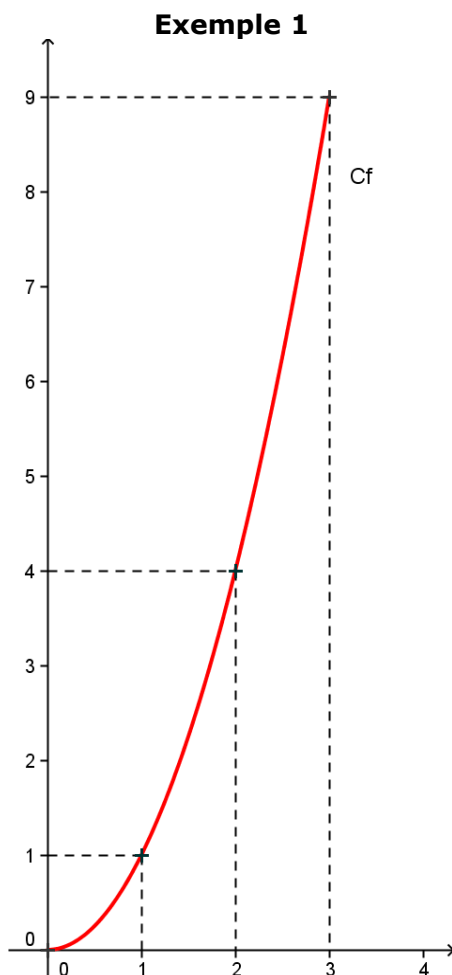
Lorsque les abscisses x augmentent, les ordonnées $f(x)$ augmentent aussi
C'est-à-dire qu'elle est croissante si sa courbe représentative **monte** lorsqu'on la parcourt dans le sens de l'axe des abscisses.

- Une fonction f est **décroissante** :

Lorsque les abscisses x augmentent, les ordonnées $f(x)$ **diminuent**
C'est-à-dire qu'elle est décroissante si sa courbe représentative **descend** lorsqu'on la parcourt dans le sens de l'axe des abscisses.

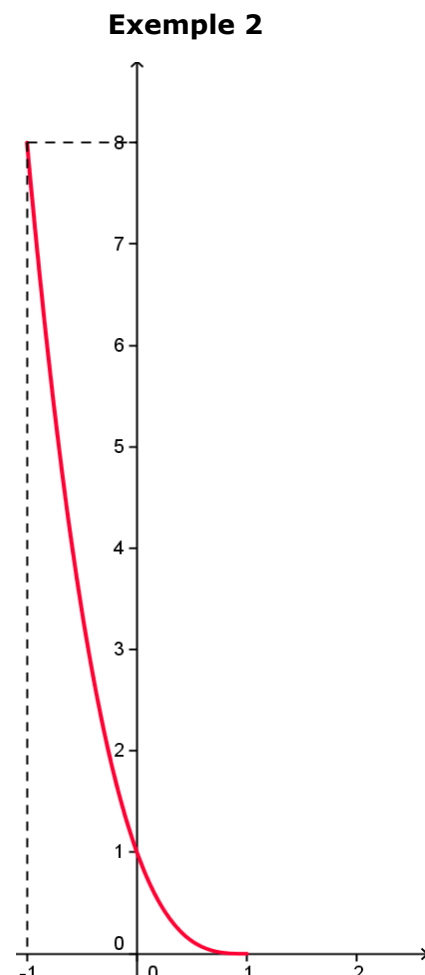
- Une fonction f est **constante**:

Lorsque quelque soit l'abscisse x , l'ordonnée $f(x)$ a toujours la même valeur



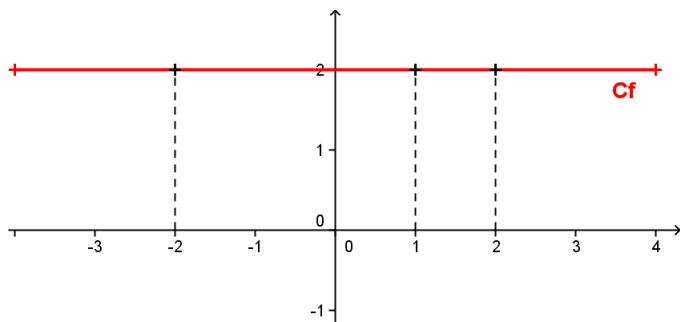
La fonction f est croissante sur $[0 ; 3]$:

Sa courbe représentative **monte**
Lorsqu'on la parcourt dans le sens
de l'axe des abscisses entre $x = 0$ et $x = 3$



La fonction f est décroissante sur $[-1 ; 1]$:

Sa courbe représentative **descend**
lorsqu'on la parcourt dans le sens
de l'axe des abscisses entre $x = -1$ et $x = 1$



La fonction f est constante sur l'intervalle $[-4 ; 4]$, pour tout x de cet intervalle l'ordonnée a toujours la même valeur : Dans notre exemple 2.
 La fonction constante est toujours représentée par **une droite parallèle à l'axe des abscisses**

Mathématiquement cela se traduit par :

Pour tout nombre a et b appartenant à un intervalle I ,

Si $a < b$ et que $f(a) < f(b)$ alors la fonction f est croissante sur cet intervalle I .

Si $a < b$ et que $f(a) > f(b)$ alors la fonction f est décroissante sur cet intervalle I .

2) Variations d'une fonction et tableau de variations d'une courbe représentative

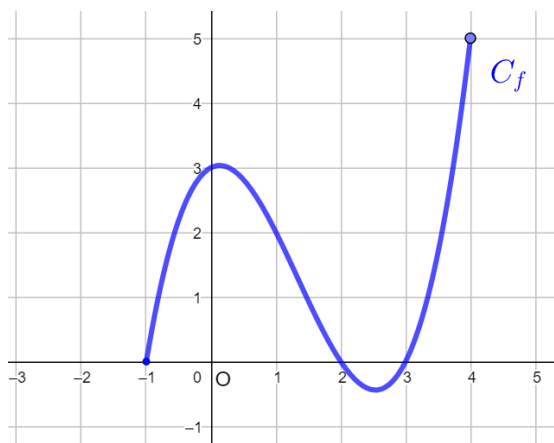
a) Variations d'une fonction

Etudier les variations d'une fonction, c'est trouver le(s) intervalle(s) sur le(s)quel(s) la fonction f est croissante, décroissante ou constante.

b) Tableau de variations d'une fonction

Les variations d'une fonction peuvent se résumer dans un tableau de variation, où l'on indique uniquement si la courbe monte, descend ou est stable. Dans la première ligne on indique les valeurs importantes de x et dans la seconde les variations de f : on lit les flèches de gauche à droite si la flèche monte, la fonction est croissante, si elle descend, elle est décroissante, si elle est horizontale, elle est constante. Aux extrémités de chaque flèche, on indique les valeurs atteintes par la fonction f .

Exemples :



En observant la courbe représentative ci-contre, nous pouvons dire :

- La fonction est définie sur $[-1 ; 4]$
- La fonction « monte » sur $[-1 ; 0]$ elle est donc **croissante** sur cet intervalle.
- La fonction « descend » sur $[0 ; 2,5]$ elle est donc **décroissante** sur cet intervalle ;
- La fonction « monte » sur $[2,5 ; 4]$ elle est donc **croissante** sur cet intervalle.

De plus $f(-1) = 0$; $f(0) = 3$; $f(2,5) \approx -0,5$ et $f(4) = 5$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1	0	2,5	4
$f(x)$	0	3	-0,5	5

En reprenant les trois exemples du I) 1), nous pouvons déduire des trois représentations graphiques :

Dans l'exemple 1 :

La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 3]$. Son tableau de variation est :

x	0	3
$f(x)$	3	9

Sur l'intervalle $[0 ; 3]$,
Les ordonnées montent de 3 à 9

Dans l'exemple 2 :

La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-1 ; 1]$. Son tableau de variation est :

x	-1	1
$f(x)$	8	0

Sur l'intervalle $[-1 ; 1]$,
les ordonnées descendent de 8 à 0

Dans l'exemple 3 :

La fonction f est constante sur l'intervalle $[0 ; 3]$. Son tableau de variation est :

x	-4	4
$f(x)$	2	2

La fonction f est constante sur l'intervalle $[-4 ; 4]$,
 $f(x)$ prend toujours la valeur 2

III) Extremums d'une fonction

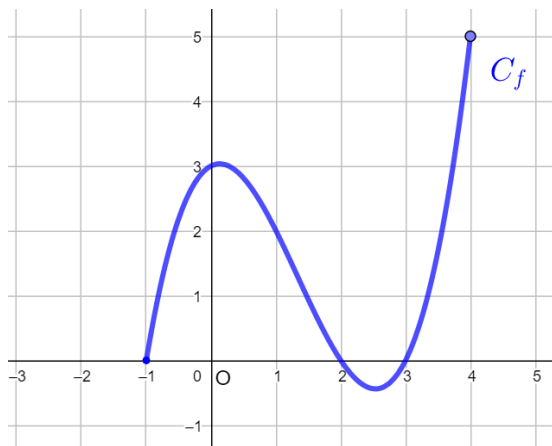
1) Définitions

- Le **maximum** d'une fonction f sur un intervalle I est la plus grande valeur atteinte par cette fonction sur cet intervalle.
- Le **minimum** d'une fonction f sur un intervalle I est la plus petite valeur atteinte par cette fonction sur cet intervalle.
- Un **extremum** d'une fonction f sur un intervalle I est un maximum ou un minimum de cette fonction f sur l'intervalle. I .

2) Exemples :

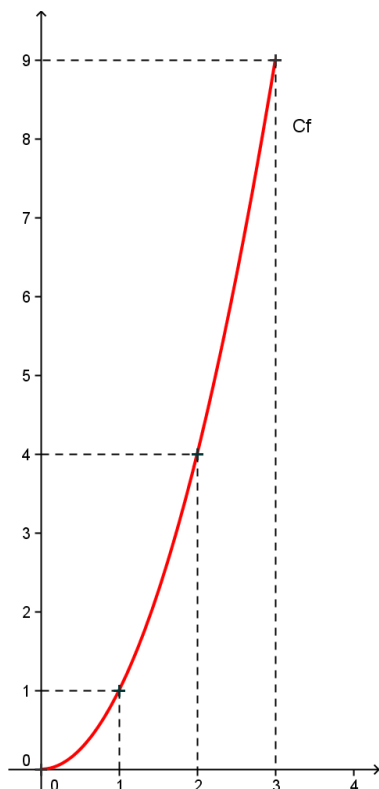
Reprenons les deux exemples précédents :

Dans l'exemple 1 :



La plus grande valeur prise par f sur l'intervalle $[-1; 4]$ est 5 et la plus petite est -0,5.
Le maximum de f sur l'intervalle $[-1; 4]$ est 5, son minimum sur cet intervalle est -0,5.

Dans l'exemple 2 :



La plus grande valeur prise par f sur l'intervalle $[0; 3]$ est 9 et la plus petite est 0.
Le maximum de f sur l'intervalle $[0; 3]$ est 9, son minimum sur cet intervalle est 0.

IV) Récapitulatif sous forme d'exemple :

Voici la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 3]$:



- 1) Décrire les variations de la fonction f
- 2) Dresser son tableau de variation.
- 3) Quels sont les extremums de cette fonction ?

1)

- La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-2 ; -1]$
- La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$
- La fonction f est croissante sur l'intervalle $[2 ; 3]$

2) Le tableau de variation est donc :

x	-2	-1	2	3
$f(x)$	0	5,5	-8	-2,5

3) La plus grande valeur prise par f sur l'intervalle $[-2 ; 3]$ est 5,5.

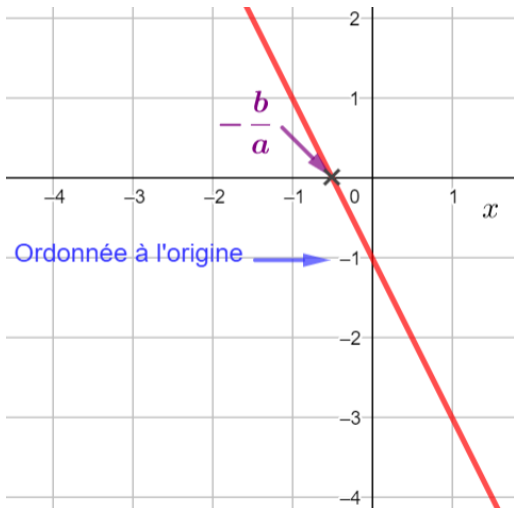
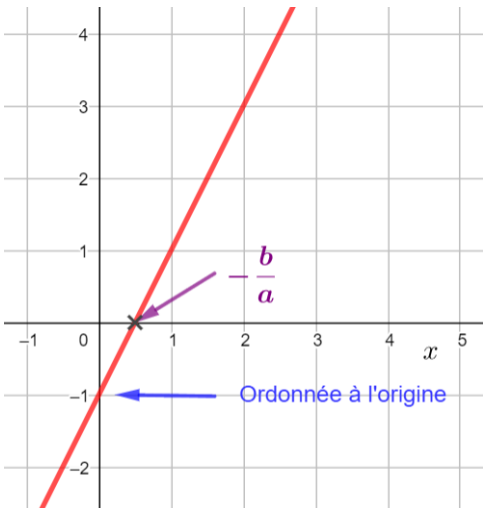
Donc f admet en -1 un maximum qui est 5,5

La plus petite valeur prise par f sur l'intervalle $[-2 ; 3]$ est -8.

Donc f admet en 2 un minimum qui est -8

V) Les fonctions de référence

1) La fonction affine $x \mapsto ax + b$

Expression algébrique	Cas où $a < 0$	Cas où $a > 0$																												
Définition : a et b sont des réels alors la fonction $f(x) = ax + b$ est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$. Remarque : a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine Propriétés : La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Si $b = 0$ la fonction est appelée fonction linéaire	Représentation graphique :  Si $a < 0$, la représentation graphique est une droite décroissante. Tableau de variation : $a < 0$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td></td></tr></table> Tableau de signe : $a < 0$: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$			x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	Représentation graphique :  Si $a > 0$, la représentation graphique est une droite croissante. Tableau de variation : $a > 0$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td></td></tr></table> Tableau de signe : $a > 0$: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$			x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+
x	$-\infty$	$+\infty$																												
$f(x)$																														
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$																											
$f(x)$	+	0	-																											
x	$-\infty$	$+\infty$																												
$f(x)$																														
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$																											
$f(x)$	-	0	+																											

Démonstration : Pour tous réels u et v tel que $u \leq v$, $v - u \geq 0$:

$$f(u) = au + b \text{ et } f(v) = av + b$$

$$\text{Pour tout réels } u, v : f(v) - f(u) = av + b - (au + b) = av + b - au - b = av - au = a(v - u)$$

On a : $v - u \geq 0$ par hypothèse

• **Lorsque $a \geq 0$**

Le produit de deux nombres positifs étant positif : $a(v - u) \geq 0$

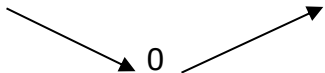
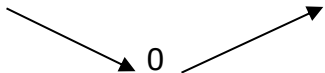
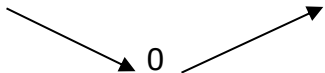
Ainsi $f(v) - f(u) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$

• **Lorsque $a \leq 0$**

Le produit de deux nombres de signes différents étant négatif : $a(v - u) \leq 0$

Ainsi $f(v) - f(u) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$

2) La fonction carré $x \mapsto x^2$

Expression algébrique	Représentation graphique	Tableau de variation et tableau de signe																
Définition : La fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ a pour expression algébrique $f(x) = x^2$ Remarque : Sa courbe représentative s'appelle une parabole Propriétés : La représentation graphique passe par l'origine La fonction carré est positive sur $\mathbb{R}$	Représentation graphique : 	Tableau de variation : <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="3"></td></tr></table> La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$ Tableau de signe :: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table> La fonction carré est positive sur $\mathbb{R}$	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f(x)$				x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$	$f(x)$	$+$	0	$+$
x	$-\infty$	0	$+\infty$															
$f(x)$																		
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$															
$f(x)$	$+$	0	$+$															

Démonstration (non obligatoire)

Pour tous réels u et v tel que $u \leq v$ on a $v - u \geq 0$:

$$f(u) = u^2 \text{ et } f(v) = v^2$$

$$\text{Pour tous réels : } f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v - u)(v + u)$$

• Pour u et v dans $[0; +\infty[$:

On a : $v - u \geq 0$ par hypothèse. La somme de deux nombres positifs est positive : $v + u \geq 0$

De là : $(v - u)(v + u) \geq 0$. (Le produit de deux nombres positifs est positif)

Ainsi $f(v) - f(u) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ **donc f est croissante sur $[0; +\infty[$**

• Pour u et v dans $]-\infty; 0]$:

On a : $v - u \geq 0$ par hypothèse. La somme de deux nombres négatifs est négative : $v + u \leq 0$

De là : $(v - u)(v + u) \leq 0$. (Le produit de deux nombres de signes différents est négatif)

Ainsi $f(v) - f(u) \leq 0$ sur $]-\infty; 0]$ **donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$**

Conséquences

Si a et b sont deux réels positifs tel que $a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$

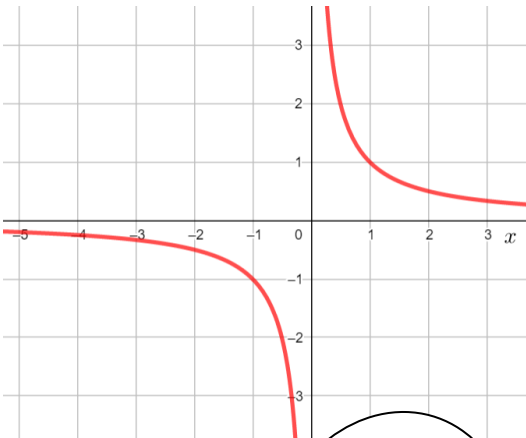
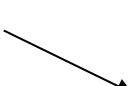
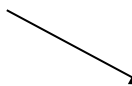
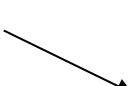
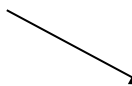
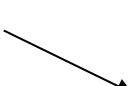
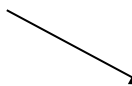
Si a et b sont deux réels négatifs tel que $a \leq b$ alors $a^2 \geq b^2$

Exemples :

$$3 \leq 5 \text{ alors } 3^2 \leq 5^2 \text{ soit } 9 \leq 25$$

$$-5 \leq -3 \text{ alors } (-5)^2 \geq (-3)^2 \text{ soit } 25 \geq 9$$

3) La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$

Expression algébrique	Représentation graphique	Tableau de variation et tableau de signe																
Définition : La fonction inverse définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a pour expression algébrique $f(x) = \frac{1}{x}$ Remarque : Sa courbe représentative s'appelle une hyperbole Propriétés : La représentation graphique n'est pas définie en 0 La fonction n'est pas définie pour $x = 0$	Représentation graphique :  La double barre indique que la fonction f n'est pas définie en 0	Tableau de variation : <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2"></td><td></td></tr></table> La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$ Tableau de signe : <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2"></td><td></td></tr></table> La fonction inverse est négative sur $]-\infty; 0[$ positive sur sur $]0; +\infty[$	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f(x)$				x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f(x)$			
x	$-\infty$	0	$+\infty$															
$f(x)$																		
x	$-\infty$	0	$+\infty$															
$f(x)$																		

Démonstration (non obligatoire)

Pour tous réels u et v **non nuls** tel que $u \leq v$ on a :

$$u - v \leq 0 :$$

$$f(u) = \frac{1}{u} \text{ et } f(v) = \frac{1}{v} \quad \text{Pour tous réels } u, v \text{ non nuls : } f(v) - f(u) = \frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{u-v}{uv}$$

• Pour u et v dans $]0; +\infty[$:

On a : $u - v \leq 0$ par hypothèse

Le produit de deux nombres positifs étant positif : $uv \geq 0$

De là : $\frac{u-v}{vu} \leq 0$ (Le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif)

Ainsi $f(u) - f(v) \leq 0$, sur $]0; \infty[$ **donc f est décroissante sur $]0; +\infty[$**

• Pour u et v dans $]-\infty; 0[$:

On a : $u - v \leq 0$ par hypothèse

Le produit de deux nombres négatifs étant positif : $uv \geq 0$

De là : $\frac{u-v}{vu} \leq 0$ (Le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif)

Ainsi $f(v) - f(u) \leq 0$, sur $]-\infty; 0[$ **donc f est décroissante sur $]-\infty; 0[$**

Conséquences

Si a et b sont deux réels non nuls et de même signe tel que $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Exemples :

$$2 \leq 4 \text{ alors } \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} \text{ soit } 0,5 \geq 0,25 \text{ et } -5 \leq -2 \text{ alors } \frac{1}{-5} \geq \frac{1}{-2} \text{ soit } -0,2 \geq -0,5$$